

## «Διαστηματικά»

Εκεί που τα μαθηματικά συναντούν τη μουσική.

Του καθηγητή μουσικής – μουσικολόγου Δημήτρη Γρίβα

Web-site: <http://users.sch.gr/dgrivas>

E-mail: [dgrivas@sch.gr](mailto:dgrivas@sch.gr)

Τα μαθηματικά και η μουσική είναι δυο επιστήμες που έχουν πολύ μεγάλη σχέση μεταξύ τους. Στην σύγχρονη αντίληψη η μουσική είναι έκφραση συναισθημάτων ή συνδυασμός ήχων και ηχοχρωμάτων ή μελέτη μουσικών οργάνων. Στην ελληνική αντίληψη (αρχαία εποχή – βυζάντιο) η μουσική είχε βαθύτερη υπόσταση και συνδέονταν άμεσα με τα μαθηματικά και την φιλοσοφία. Ως προς τα μαθηματικά, από τον Πυθαγόρα, τον Αριστόξενο και τον Ευκλείδη, αλλά και τους Αλύπιο και Αριστείδη Κουιντιλιανό, μέχρι τον Σίμωνα Καρρά (η συγγραφή του «Θεωρητικού» του αποτελεί κατά τη γνώμη των πιο σπουδαίων μουσικολόγων το μεγαλύτερο γεγονός στην ελληνική μουσική του 20<sup>ου</sup> αιώνα) η βαρύτητα της μουσικής θεωρίας δίνεται στα «διαστηματικά», δηλ. στις σχέσεις των αποστάσεων ανάμεσα σε δύο φθόγγους. Βλέπετε, η ελευθερία της ελληνικής σκέψης ουδέποτε μέσα σε τόσους αιώνες δεν διανοήθηκε να τυποποιήσει τα διαστήματα σε ένα συγκεκριμένο σύστημα, όπως έγινε τους τελευταίους αιώνες στην δυτικοευρωπαϊκή μουσική, εκφράζοντας ίσως έτσι το φασιστικό ιδεώδες της παπικής εκκλησίας και των εξουσιαστών της δυτικής Ευρώπης.

Ο Πυθαγόρας (572 - 500 π.Χ.) ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός και θεωρητικός της μουσικής. Υπήρξε ο πρώτος που έθεσε τις βάσεις της επιστήμης της μουσικής με μια επιστημονικά θεμελιωμένη θεωρία της μουσικής. Ίδρυσε σχολή γύρω στο 532 π.Χ. όπου δίδασκε ότι ο κόσμος πρέπει να ερμηνεύεται με αριθμούς. Ανακάλυψε τη σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και το τονικό ύψος που δίνουν. Με υπολογισμούς καθαρά μαθηματικούς βρήκε τις αριθμητικές αναλογίες των μουσικών διαστημάτων της όγδοης (οκτάβας) της τέταρτης (4/3), της πέμπτης (3/2) καθώς και του μείζονα τόνου, τη διαφορά δηλαδή ανάμεσα στην τέταρτη και την πέμπτη (9/8). Για τους Πυθαγόρειους διάστημα είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του (ακραία σημεία) σχηματίζουν αριθμητική σχέση (αναλογία αριθμών). Οι όροι διάστημα και λόγος είναι ταυτόσημοι.

Σε κάθε διάστημα επομένως υπάρχουν πάντα δύο αριθμοί.

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του υποστήριξε επίσης την άποψη ότι από την περιστροφή των πλανητών παράγονται ήχοι, ανάλογα με την απόστασή τους από τη γη, οι οποίοι όμως δεν ακούγονται. Το σύνολο των ήχων αυτών δίνει την «αρμονία των σφαιρών». Την αρμονία των σφαιρών οι Πυθαγόρειοι τη συνδύασαν και με την αρμονία της ψυχής. Οι φιλοσοφικές αντιλήψεις τους επηρέασαν τον Πλάτωνα ο οποίος αργότερα θεωρεί ότι η αρμονία της μουσικής καθρεφτίζει την αρμονία της ψυχής.

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τον αριθμό 10 τέλειο. Επειδή αυτός προκύπτει από το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών  $1+2+3+4=10$ , του έδωσαν το όνομα «τετρακτύς». Κατά τον Θέωνα το Σμυρναίο υπάρχουν έντεκα τετρακτύες που η κάθε μια εκφράζει ένα τομέα της φιλοσοφικής σκέψης στην αρχαιότητα. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η 4η τετρακτύς δηλώνει τα τέσσερα απλά στοιχεία

φωτιά, αέρα, νερό και γη, η 6η αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα: με 1 εκφράζεται το σημείο, με 2 το μήκος, με 3 η επιφάνεια και με 4 το στερεό, η 8η δίνει τα συστατικά του ζώου: τα 1,2,3 αντιστοιχούν με το λογιστικό, το θυμικό και το επιθυμητικό, δηλαδή εκφράζουν την ψυχή, ενώ το 4 το σώμα.

Ο Πλάτωνας θεωρεί ότι η αρμονία της μουσικής καθρεφτίζει την αρμονία της ψυχής.

Η μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα κατασκευάζεται με βάση τις αναλογίες του κύβου, ο οποίος εκφράζεται με τον αριθμό 4 της 5ης τετρακτύος (1 = τετράεδρο, 2 = οκτάεδρο, 3 = εικοσάεδρο, 4 = κύβος) και συμβολίζει τη γη και το συνδυασμό των στοιχείων της. Ο κύβος έχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές. Οι αριθμοί 12 και 6 δίνουν την αναλογία 2/1, οι 8 και 6 την αναλογία 4/3 ενώ οι 12 και 8 την αναλογία 3/2. Επίσης ο αριθμός 8 είναι το αρμονικό μέσο των 6 και 12, ενώ το αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών είναι ο 9. Ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος δίνουν την αναλογία 9/8. Έτσι προκύπτουν οι μαθηματικές αναλογίες βάσει των οποίων κατασκευάζεται η μουσική κλίμακα κατά τους Πυθαγόρειους. Οι αναλογίες αυτές αποδείχθηκαν και στην πράξη από τα πειράματα που έκανε ο Πυθαγόρας πάνω στο «μονόχορδο», μία κατασκευή με μία μόνο χορδή και ένα κινητό καβαλάρη που διαιρούσε τη χορδή επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται. Το μονόχορδο ο Πυθαγόρας το διαίρεσε σε 12 ίσα τμήματα (όσες και οι ακμές του κύβου).

Με τη χορδή «ανοιχτή» δηλαδή σε θέση να μπορεί να ταλαντώνεται όλο το μήκος της (λόγος 1, συχνότητα 1), έκρουσε και άκουσε ένα μουσικό τόνο. Στη συνέχεια περιόρισε το μέρος της χορδής που ταλαντώνεται στο μισό της μήκος, και βρήκε ότι ο ήχος που ακούστηκε είναι η διαπασών, αυτό που σήμερα ονομάζουμε οκτάβα. Το ύψος λοιπόν του ήχου επηρεάζεται από το μήκος της χορδής και μάλιστα όταν η αναλογία του μήκους είναι 1/2 (συχνότητα 2/1) έχουμε το διάστημα της οκτάβας. Έτσι ορίστηκαν τα άκρα της μουσικής κλίμακας, η υπάτη και η νήτη. Στη συνέχεια μετακινώντας τον καβαλάρη σε διάφορα σημεία, βρήκε ότι αν ταλαντωνόταν τα 3/4 της χορδής (συχνότητα 4/3) προέκυπτε ο τέταρτος φθόγγος από τους οκτώ μιας μουσικής κλίμακας, η μέση, ενώ αν ταλαντωνόταν τα 2/3 της χορδής (συχνότητα 3/2) προέκυπτε ο πέμπτος φθόγγος, η παραμέση. Οι υπόλοιποι φθόγγοι της κλίμακας κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας το λόγο 9/8 ως εξής:

Ο δεύτερος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πρώτου (υπάτη) αν τον πολλαπλασιάσουμε με 9/8:  $1 \times 9/8 = 9/8$  δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα 8/9 της χορδής.

Ο τρίτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του δεύτερου (9/8) αν και πάλι πολλαπλασιαστεί με 9/8:  $9/8 \times 9/8 = 81/64$  δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 64/81 της χορδής.

Ο έκτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πέμπτου (παραμέση) που πολλαπλασιάζεται με 9/8:  $1:2/3 \times 9/8 = 27/16$  δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 16/27 της χορδής.

Τέλος, ο έβδομος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του έκτου και πάλι πολλαπλασιαζόμενου με 9/8:  $1:16/27 \times 9/8 = 243/128$  δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα 128/243 της χορδής.

Πέρα από το μονόχορδο, ο Πυθαγόρας πειραματίστηκε και με άλλα υλικά και τις ιδιότητές τους που συνθέτουν τα μουσικά διαστήματα, όπως η τάση χορδών ίσου μήκους και πάχους, το μήκος ηχητικού σωλήνα κ.τ.λ. Ο χωρισμός και καθορισμός των μουσικών διαστημάτων που πέτυχε, ήταν ένα τεράστιο σημασίας επίτευγμα τόσο για τη μουσική και τη θεωρία της όσο και για τα

μαθηματικά και τη δύναμή τους να ερμηνεύουν τον κόσμο με αριθμούς όπως εξάλλου δίδασκε και ο Πυθαγόρας. Πέρα από τη μεγάλη σημασία για τη θεωρία της μουσικής, ο υπολογισμός του έδωσε την ευκαιρία να κατασκευαστούν μουσικά όργανα με μεγαλύτερη ακρίβεια από πριν.

Με το πέρασμα του χρόνου, η Πυθαγόρεια μουσική κλίμακα τροποποιήθηκε είτε για πρακτικούς είτε για καθαρά φιλοσοφικούς λόγους, όμως ο Πυθαγόρας είχε δείξει έναν δρόμο που και οι σύγχρονες μουσικές κλίμακες ακολουθούν. Ακόμα και σήμερα υπολογίζουμε μαθηματικά τα μουσικά διαστήματα τα οποία βέβαια έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά από τότε.

Ο Αριστόξενος, νεότερος του Πυθαγόρα (περί το 375 π.Χ.) υπήρξε φιλόσοφος και σημαντικότερος θεωρητικός της μουσικής και του δόθηκε μάλιστα η ονομασία «ο Μουσικός». Η μέθοδός του ήταν κυρίως εμπειρική. Το σύστημα διδασκαλίας του βασίζεται σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα, στην ικανότητα του αυτιού να αντιλαμβάνεται την αρμονική σχέση των μουσικών τόνων. Δεν ερευνά τις αριθμητικές σχέσεις μέσα στην οκτάβα, όμως καθορίζει τον ολόκληρο και τον μισό τόνο και κατασκευάζει μια κλίμακα με βάση το ένα δωδέκατο του τόνου.

Ευκλείδης από την άλλη, έχει μια γεωμετρική πρόταση για τα μουσικά διαστήματα. Θεωρεί ότι αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές, με μία όμως διαφορά: ενώ οι ευθείες γραμμές που παράγονται ως αριθμοί, ορίζονται με δύο γράμματα ένα στην αρχή και ένα στο τέλος τους, τα μουσικά διαστήματα δηλώνονται με ένα γράμμα.

## Μουσική και αριθμοί

Γράφει ο/η Administrator

04.03.07



Η έκφραση επιδράσεων και συναισθημάτων αντιπροσωπεύει, μαζί με τη θεωρία που βασίζεται σε μαθηματικούς κανόνες, τη θεμελιώδη δομή σκέψης γύρω από τη μουσική.



**Ας θυμηθούμε λίγα μαθηματικά:**

-Σειρά ή ακολουθία: με βάση κάποιο νόμο σχηματίζουμε κάποιον αριθμό  $x_1$  έπειτα έναν δεύτερο  $x_2$ , έναν τρίτο  $x_3$ , κτλ, που αντιστοιχούν κατά σειρά στους φυσικούς αριθμούς 1,2,3... και σχηματίζουν μια ακολουθία (α)  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  που μπορεί να είναι απέραντη ή πεπερασμένη.

Οι αριθμοί  $x_1, x_2, x_3, x_n$  ονομάζονται όροι, ενώ οι αριθμοί 1,2,3,... που δείχνουν την

τάξη κάποιου όρου, ονομάζονται δείκτες.

-Αναγωγική ακολουθία: μια σειρά όρων που ο καθένας τους μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με εκείνους που προηγούνται από αυτόν.

*Παράδειγμα* αναγωγικής ακολουθίας, η σειρά Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

<u>Δείκτες:</u>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<u>Όροι:</u>	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Η σειρά Fibonacci (κάθε όρος είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων:  $3=2+1$ ,  $5=3+2$  κτλ) είναι απέραντη, οι αριθμοί δηλαδή μπορούν να φθάσουν ως το άπειρο.

-Μέση αριθμητική τιμή (ή αριθμητικός μέσος): ο αριθμός που έχουμε όταν προστίθενται οι αριθμοί και διαιρείται το άθροισμα που προέκυψε με τον αριθμό των προσθετέων.

*Παράδειγμα*, ο μέσος όρος στη βαθμολογία ενός τμήματος 6 μαθητών:

Ο Γιώργος έχει βαθμό 17

Ο Κώστας έχει βαθμό 14

Ο Γιάννης έχει βαθμό 14

Η Μαρίνα έχει βαθμό 15

Η Χρύσα έχει βαθμό 19

Η Ντίνα έχει βαθμό 16

Το τμήμα έχει μέσο όρο  $(17+14+14+15+19+16):6=$  15,8

-Αρμονική αναλογία δίνουν τρεις αριθμοί A, B, Γ, όταν  $A/\Gamma = A \cdot B/B \cdot \Gamma$

Ο αριθμός B ονομάζεται μέσος αρμονικός, ενώ οι αριθμοί A και Γ ονομάζονται άκροι όροι.

Παράδειγμα,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
					Γ		Β				Α

ή αλλιώς :  $^{12}/_6 = ^{12-8}/_{8-6} = ^4/_2$

Αν πάρουμε τους αριθμούς με το κόκκινο χρώμα, ο αριθμητικός μέσος τους είναι ο αριθμός 9 [(6+7+8+9+10+11+12=) 63:7= 9] ενώ ο αρμονικός μέσος τους είναι ο αριθμός 8 (=Β).

Ο αριθμός 6 και ο αριθμός 12 είναι οι άκροι όροι της μουσικής αναλογίας. Εκφράζουν το κάτω και πάνω Ντο της κλίμακας. Ο αριθμός 8 είναι το αρμονικό μέσο των άκρων όρων της αναλογίας του 6 και του 12, και ο αριθμός 9 το αριθμητικό μέσο των άκρων όρων της ίδιας αναλογίας. Έτσι, ο αριθμός 8 εκφράζει τη συχνότητα του φθόγγου Φα και ο αριθμός 9 τη συχνότητα του φθόγγου Σολ.

Στην Αρχαία Ελλάδα, οι Πυθαγόρειοι κατασκεύασαν τη μουσική αναλογία και τη μουσική κλίμακα δια μέσου του κύβου, που συμβολίζει τη γη και το συνδυασμό των στοιχείων της. Ο κύβος έχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές, δίνει δηλαδή τους όρους: πρώτο (6), δεύτερο (8) και τέταρτο (12) της μουσικής αναλογίας. Ο τρίτος όρος (9) είναι ο αρμονικός μέσος:

Δείκτες	1	2	3	4
Όροι	6	8	9	12
Ονόματα φθόγγων	ντο	φα	σολ	ντο
Αρχαία ονόματα φθόγγων	υπάτη	μέση	παράμεση	νήτη
Σχέσεις συχνοτήτων	1	4/3	3/2	2

Με τη σχέση  $9/8$  ( $^{Σολ}/_{Φα}$  = μείζονας τόνος), ο Πυθαγόρας κατασκευάζει την κλίμακα:

Για τον δεύτερο φθόγγο (Ρε, σήμερα) πολλαπλασιάζει τον πρώτο (1, βλέπε σχέσεις συχνοτήτων στον παραπάνω πίνακα), με τα  $9/8$ (= $9/8$ )

Για τον τρίτο φθόγγο (Μι, σήμερα) πολλαπλασιάζει τον δεύτερο με τα  $9/8$

$$(9/8 \text{ επί } 9/8) = 81/64$$

Τον τέταρτο φθόγγο (Φα) τον δίνει η σχέση συχνοτήτων  $4/3$ .

Τον πέμπτο φθόγγο (Σολ), η σχέση συχνοτήτων  $3/2$ .

Για τον έκτο φθόγγο (Λα) πολλαπλασιάζει τον πέμπτο με τα  $9/8$  ( $3/2 \text{ επί } 9/8$ )  $= 27/16$

Για τον έβδομο φθόγγο (Σι, σήμερα) πολλαπλασιάζει τον έκτο πάλι με τα  $9/8$   
( $27/16 \text{ επί } 9/8$ )  $= 243/168$

Για όγδοο φθόγγο (Ντο στην ψηλότερη οκτάβα) παίρνει τον αριθμό 2 από την αναλογία (βλέπε σχέσεις συχνοτήτων στον παραπάνω πίνακα).

-----

*Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα μιας εφαρμογής της μουσικής σκέψης σε κάποια άλλη τέχνη:*



Η μεγάλη πλευρά του Παρθενώνα έχει 17 κίονες.

Ο αριθμός 17 είναι το άθροισμα των όρων του κλάσματος  $9/8$ , του φθόγγου με τον οποίο κατασκευάζεται η μουσική κλίμακα.

Η μικρή πλευρά του παρθενώνα έχει 8 κίονες.

Ο αριθμός 8 είναι το αρμονικό μέσο του αριθμού των εδρών του κύβου (6) και του αριθμού των ακμών του κύβου (12), δηλαδή των άκρων όρων της μουσικής αναλογίας.

-----

**Επιγραμματικά**, η οντολογία του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα θα μπορούσε να συνοψισθεί:

*Αριθμός*= ιδέα= ιδέα του 'ιδανικού αριθμού'.

*Ιδέα*= υπόσταση των ακουστικών φαινομένων= εσωτερική ουσία των πραγμάτων

Οι αρχαίοι Έλληνες ερμηνεύουν τη μουσική ορθολογικά.

Στον **μεσαίωνα**, τα απλά μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν, μπορούν να θεωρηθούν υπεύθυνα για το υψηλό ποσοστό σύμφωνων διαστημάτων που συναντά κανείς στα έργα της εποχής.

Τον **17<sup>ο</sup> αιώνα**, οι αριθμοί γίνονται μέσα εξωτερικών μετρήσεων χωρίς μεταφυσική ιδιαιτερότητα.

Τον **18<sup>ο</sup> αιώνα** τον έχουμε ήδη εξετάσει αναλυτικά.

Παρά όλα αυτά, η **αισθητική της μουσικής** παρέμεινε πάντα πιστή στην ιδέα ότι η μουσική υπόσταση ουσιαστικά, είναι **μεταφυσική**.

Εδώ ας θυμηθούμε ότι μεταφυσική είναι η αναζήτηση της πραγματικής φύσης των πραγμάτων, η αναζήτηση των υψηλότερων αρχών της σκέψης και της ύπαρξης, η επιστήμη των πρώτων αιτιών και των πρώτων αρχών, η φιλοσοφία, η γενική και αφηρημένη θεωρία.

Η αισθητική της μουσικής εξελίχθηκε από **θεωρία κατανόησης** (αίσθησης), σε **φιλοσοφία** στηριζόμενη σε υποθέσεις.

Τον **19<sup>ο</sup> αιώνα**, ο **Σοπενχάουερ** ορίζει την εσωτερική ουσία του κόσμου ως *θέληση* (Wille) που, απ' όλες τις τέχνες, μόνο η μουσική μπορεί να αντιπροσωπεύσει επαρκώς. Η θέληση δεν κατευθύνεται από τον ορθολογισμό αλλά από μια τυφλή ώθηση, δύναμη παρόμοια με το 'Αυτό' (id, Es) του **Φρόιντ**.

Η μουσική είναι η *ουσία των πραγμάτων* (Dich an Sich) ενώ η γλώσσα απλή τεκμηρίωσή τους.

Παραλλαγή της μεταφυσικής της μουσικής του Σοπενχάουερ αποτελεί η θεωρία του **Νίτσε** για το διονυσιακό και το απολλώνειο στοιχείο.

Στην **Ιδεολογία των Μουσικών Επιδράσεων** (doctrine of affections, Affektenlehre), η μουσική είναι έκφραση ανθρώπινων ιδιοσυγκρασιών, παθών, διαθέσεων.

Η επίδραση ποικίλλει στην ιστορική πορεία.

Και βέβαια δεν πρέπει να παραλείψουμε τη θεωρία για την **Αυτονομία της Μουσικής** του **Βακενρόντερ** (1773-98):

Το αληθινό περιεχόμενο της μουσικής αποτελείται από υπάρχουσες ανταποκρίσεις και συναισθήματα που μόνο η μουσική μπορεί να περικλείσει και να φέρει σε φως.

Τα συναισθήματα συνδέονται με τη μουσική φόρμα χωρίς απαραίτητα να έχουν σχέση με τα ιδιαίτερα συναισθήματα των ακροατών.

---

Τελευταία ανανέωση ( 14.04.07 )

[< Προηγ.](#)

[Επόμε. >](#)

© 2007 vouliakis.gr

**Ouliathis**  
Πρύτανης



Εγγραφή: 04  
Οκτ 2003  
Δημοσιεύσεις:  
1051  
Τόπος:  
Κύπρος

□ Δημοσιεύθηκε: Πेम Σεπ 07, 2006 6:37 am    Θέμα δημοσίευσης:



Τι να πει κανείς γι αυτά που λέει ο Θεοδωράκης!! Θα ήθελα πάντως να σχολιάσω το παρακάτω

**Παράθεση:**

Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι η Αρμονία του Σύμπαντος πρέπει να υπόκειται στη γενική θεωρία των αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι η Αρμονία του Σύμπαντος αντανakλάται πιστά στην εφαρμοσμένη μουσική θεωρία και πράξη, αφού η θεωρία των αριθμών ταυτίζεται με τη μουσική. Πράγματι τα εύηχα διαστήματα μιας οποιασδήποτε συνήχησης ανταποκρίνονται σε μια ιδιαίτερα απλή αναλογία αριθμών. Αυτή η αποκάλυψη ότι οι ποιοτικές διαφορές μπορεί να εξηγούνται και να ελέγχονται από τον μαθηματικό Λόγο, ήταν οπωσδήποτε πολύ σημαντική. Το διάστημα της 8ης (οκτάβας) υπήρξε το θεμέλιο και η βάση όπου δέσποζε η Αντίθεση του 'Αρτιου με το Περιττό, του Ενός με το Δύο και όπου η αντίθεση αυτή οδηγούσε στην τέλεια εναρμόνιση.

Αυτό (το ότι οι συνηχήσεις διέπονται από λόγους ρητών αριθμών) αποδεικνύει αν μη τι άλλο πως τα μαθηματικά είναι κάτι το εξαιρετικά οικείο για τον άνθρωπο. Όταν ο πρωτόγονος άνθρωπος άρχισε να παίζει μουσική, απλά δήλωνε τι επρόκειτο να επιτύχει στο μέλλον. Δήλωνε πως ήδη γνώριζε μαθηματικά με έναν ασυνείδητο τρόπο. Ειδικά όταν όλες οι αρμονίες περιέχονται μέσα στους 4 πρώτους αριθμούς, που η πρόσθεσή τους μας δίνει





την δεκάδα, την βάση δηλαδή του μετρικού μας συστήματος. Τώρα γιατί ο Θεοδωράκης λέει πως στο διάστημα της 8ης δεσπόζει η αντίθεση άρτιου και περιττού; Αυτό λέγεται γιατί το διάστημα ογδόης αντιπροσωπεύει το λόγο διπλασίου ή διαπασών όπως το έλεγαν οι αρχαίοι 2:1, όπου αντιπροσωπεύει και την πρωταρχική διαίρεση του σύμπαντος, ο ένας άρτιος (2) και ο άλλος περιττός (1). Αλλά και η διαίρεση αυτού του διαστήματος ή χορδής, είναι πάλι σχέσεις άρτιου προς περιττό διότι αυτό το διάστημα (δηλαδή το 2:1), χωρίζεται σε 3:2 (ημιόλιος λόγος) και 4:3 (διατέσσερα) που είναι πάλι σχέσεις άρτιου προς περιττού. Ο λόγος τώρα του 3:2 και 4:3 είναι αυτό που αποκαλούμαι τόνος στην μουσική, και είναι ίσος με 9:8 ή 8:9 ανάλογα ποιόν αριθμό διαλέγεις ως αριθμητή, και αποτελεί βέβαια την βασική "μονάδα" της μουσικής. Με αυτόν τον λόγο ο Πλάτωνας χτίζει την ψυχή του κόσμου στον Τίμαιο.

Το διάστημα συνεπώς 2:1 ή 1:2 χωρίζεται ως εξής 1, 4:3, 3:2, 2. Η σχέση τους τώρα με τα μαθηματικά. Από τις αναλογίες ξέρουμε πως ο αριθμητικός μέσος AM δύο αριθμών α και β είναι το ημίαθροισμά τους, δηλαδή  $AM = (α+β)/2$ , ενώ ο αρμονικός τους μέσος M είναι το διπλάσιο του γινομένου τους δια το άθροισμα τους δηλ  $M = 2αβ/(α+β)$ , που μας δίνουν αντίστοιχα για το διάστημα 1:2 αριθμητικό μέσο τον ημιόλιο 3:2, και αρμονικό μέσο τον 4:3. Συνεπώς μιλούμε για καθαρά μαθηματικά, μόνο που στην μουσική οι αριθμοί βρίσκονται εν κινήσει. Να λοιπόν γιατί ο πρωτόγονος άνθρωπος όταν έπαιζε μουσική, ήδη δήλωνε ασυνείδητα πως γνωρίζει μαθηματικά.

Κι απ αυτό το σημείο και μετά ασχολήσου με τις γνώμες των θνητών ακούγοντας την απατηλή διάταξη των λόγων μου.

[Αρθρα](#)

[📖 Εκτύπωση](#)

[✉ Email](#)

## Μαθηματικά και μουσική

Του μέλους [rapsodos](#)

Δημοσιεύθηκε στις **25 Αυγούστου 2004**

Τα μαθηματικά και η μουσική είναι δυο επιστήμες που έχουν πολύ μεγάλη σχέση μεταξύ τους. Από την αρχαιότητα ακόμη οι δύο τέχνες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και η αλληλεπίδραση αυτή φτάνει ως τις μέρες μας...

Αναγνώσεις: 3403

Σχόλια: **10**



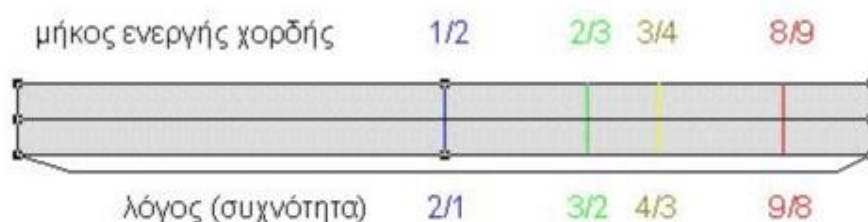
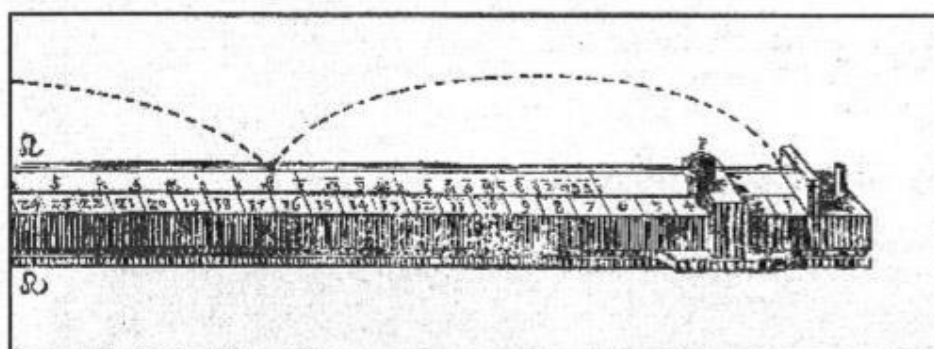
Η ιδέα της σύνδεσης των μαθηματικών και της μουσικής γεννήθηκε πριν από 26 ολόκληρους αιώνες στην αρχαία Ελλάδα από τον Πυθαγόρα, μαθηματικό και ιδρυτή της πυθαγόρειας σχολής σκέψης. Ο φιλόσοφος γνώριζε πολύ καλά τη σχέση της μουσικής με τους αριθμούς. Οι ειδικοί ερευνητές θεωρούν ότι το πιθανότερο είναι πως ο ίδιος και οι μαθητές του εντρύφησαν στη σχέση της μουσικής και των αριθμών μελετώντας το αρχαίο όργανο μονόχορδο.

Όπως φαίνεται από το όνομά του, το μονόχορδο ήταν ένα όργανο με μία χορδή και ένα κινητό καβαλάρι που διαιρούσε τη χορδή επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται. που από αρκετούς μελετητές τοποθετείται στην οικογένεια του λαούτου δηλαδή με βραχίονα, χέρι. Το μονόχορδο χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό των μαθηματικών σχέσεων των μουσικών ήχων. Ονομάζονταν και "Πυθαγόρειος κανών" γιατί απέδιδαν την εφεύρεσή του στον Πυθαγόρα. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί εργάστηκαν για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα, όπως ο Αρχύτας (εργάστηκε στις αναλογίες των διαστημάτων του τετραχόρδου στα τρία γένη, διατονικό, χρωματικό και εναρμόνιο και ανακάλυψε το λόγο της μεγάλης τρίτης στο εναρμόνιο γένος), ο Ερατοσθένης ο Δίδυμος (σ' αυτόν

αποδίδεται ο καθορισμός του "κόμματος του Διδύμου", που είναι η διαφορά μεταξύ του μείζονος τόνου ( $9/8$ ) και του ελάσσονος ( $10/9$ ) δηλαδή  $81/80$ ).

Όμως, πώς ακριβώς πειραματίστηκαν οι Πυθαγόρειοι στο μονόχορδο, για την ανάδειξη των σχέσεων μαθηματικών και μουσικής; Ήταν εντυπωσιακό το γεγονός ότι μόνο οι ακριβείς μαθηματικές σχέσεις έδιναν αρμονικούς ήχους στο μονόχορδο. Για παράδειγμα, έπρεπε να χωρίσουν ακριβώς στη μέση τη χορδή, και όχι περίπου στη μέση, ώστε να έχουν το ευχάριστο ψυχικό συναίσθημα που απορρέει από έναν αρμονικό ήχο.

Αν μειώσουμε λοιπόν το μήκος μιας χορδής ακριβώς στο μισό, τότε ο ήχος που παράγεται είναι ακριβώς μία οκτάβα υψηλότερος (μία οκτάβα είναι ένα ντο, ρε, μι, φα, σολ, λα, σι, ντο) - μας δίνει, δηλαδή, ένα ντο πιο πάνω. Αν μειώσουμε το μήκος της χορδής κατά  $1/3$ , τότε τα  $2/3$  της χορδής που απομένουν μας δίνουν τη διαφορά της πέμπτης (δηλαδή από το ντο στο λα). Κι αν μειώσουμε το μήκος κατά  $1/4$ , τότε τα  $3/4$  που απομένουν μας δίνουν τη διαφορά της τετάρτης (από το ντο στο σολ). Ήταν ξεκάθαρο, λοιπόν, σ' αυτό το επίπεδο της παρατήρησης ότι τα μαθηματικά "κυβερνούν" τη μουσική. Το γεγονός ότι από τους ήχους αυτών των διαφορών δημιουργείται ένα ευχάριστο συναίσθημα στον ακροατή, οδήγησε τους Πυθαγορείους στο συμπέρασμα ότι οι ακέραιοι και τα κλάσματα ελέγχουν όχι μόνο τον άψυχο αλλά και τον έμψυχο κόσμο μέσω της μουσικής.



Για τους Πυθαγορείους, αυτή η άμεση και ακριβής σχέση μαθηματικών, μουσικής και ευχάριστου ψυχικού συναισθήματος αποτελούσε τη μέγιστη απόδειξη ότι η αλήθεια, στο ύψιστο επίπεδό της, εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις. Πίστευαν, μάλιστα, ότι η ψυχή, μέσα από τα μαθηματικά και τη μουσική, μπορούσε να εξυψωθεί ώσπου να ενωθεί με το σύμπαν και ότι ορισμένα μαθηματικά σύμβολα έχουν αποκρυφιστική σημασία. Στις αρχές της αρμονίας των Πυθαγορείων βασίστηκε η ευρωπαϊκή μουσική μέχρι, τουλάχιστον, τη στιγμή που ο Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ, μέσω της σύνθεσής του "Καλοσυγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο" πρότεινε την υποδιαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ημιτόνια - κάτι, παρεμπιπτόντως, που είχε προτείνει δύο χιλιάδες χρόνια πριν από τον Μπαχ ο Αριστόξενος, όμως δεν

εισακούστηκε

Συμπερασματικά, παρά τον ηθικοθηρησκευτικό χαρακτήρα της διδασκαλίας του, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του διαμόρφωσαν φιλοσοφικές αρχές που επηρέασαν την πλατωνική και αριστοτελική διάνοηση, κυρίως όμως συνέβαλαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών, της μουσικής και της δυτικής φιλοσοφίας. Καθιέρωσαν την αντίληψη ότι η πραγματικότητα - συμπεριλαμβανομένης της μουσικής και της αστρονομίας- είναι στο βαθύτερο επίπεδο της μαθηματικής φύσης .

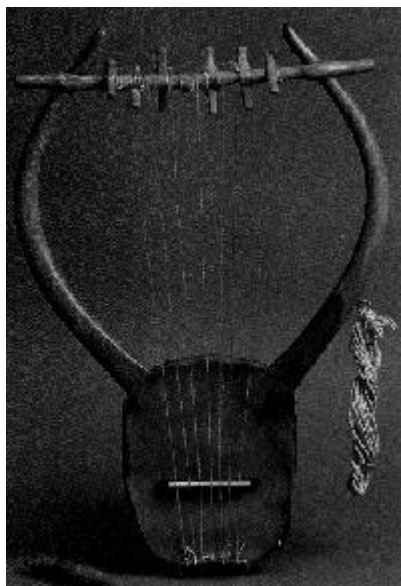
Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τον αριθμό 10 τέλειο. Επειδή αυτός προκύπτει από το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών  $1+2+3+4=10$ , του έδωσαν το όνομα «τετρακτύς». Κατά τον Θέωνα το Σμυρναίο υπάρχουν έντεκα τετρακτύες που η κάθε μια εκφράζει ένα τομέα της φιλοσοφικής σκέψης στην αρχαιότητα. Ενδεικτικά αναφέρω ότι η 4η τετρακτύς δηλώνει τα τέσσερα απλά στοιχεία φωτιά, αέρα, νερό και γη, η 6η αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα: με 1 εκφράζεται το σημείο, με 2 το μήκος, με 3 η επιφάνεια και με 4 το στερεό, η 8η δίνει τα συστατικά του ζώου: τα 1,2,3 αντιστοιχούν με το λογιστικό, το θυμικό και το επιθυμητικό, δηλαδή εκφράζουν την ψυχή, ενώ το 4 το σώμα.

Η μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα κατασκευάζεται με βάση τις αναλογίες του κύβου, ο οποίος εκφράζεται με τον αριθμό 4 της 5ης τετρακτύος (1 = τετράεδρο, 2 = οκτάεδρο, 3 = εικοσάεδρο, 4 = κύβος) και συμβολίζει τη γη και το συνδυασμό των στοιχείων της. Ο κύβος έχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές. Οι αριθμοί 12 και 6 δίνουν την αναλογία 2/1, οι 8 και 6 την αναλογία 4/3 ενώ οι 12 και 8 την αναλογία 3/2. Επίσης ο αριθμός 8 είναι το αρμονικό μέσο των 6 και 12, ενώ το αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών είναι ο 9. Ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος δίνουν την αναλογία 9/8. Έτσι προκύπτουν οι μαθηματικές αναλογίες βάση των οποίων κατασκευάζεται η μουσική κλίμακα κατά τους Πυθαγόρειους. Οι αναλογίες αυτές αποδείχθηκαν και στην πράξη από τα πειράματα που έκανε ο Πυθαγόρας πάνω στο μονόχορδο το οποίο διαίρεσε σε 12 ίσα τμήματα (όσες και οι ακμές του κύβου).

Με τη χορδή «ανοιχτή» δηλαδή σε θέση να μπορεί να ταλαντώνεται όλο το μήκος της (λόγος 1, συχνότητα 1), έκρουσε και άκουσε ένα μουσικό τόνο. Στη συνέχεια περιόρισε το μέρος της χορδής που ταλαντώνεται στο μισό της μήκος, και βρήκε ότι ο ήχος που ακούστηκε είναι η διαπασών, αυτό που σήμερα ονομάζουμε οκτάβα. Το ύψος λοιπόν του ήχου επηρεάζεται από το μήκος της χορδής και μάλιστα όταν η αναλογία του μήκους είναι 1/2 (συχνότητα 2/1) έχουμε το διάστημα της οκτάβας. Έτσι ορίστηκαν τα άκρα της μουσικής κλίμακας, η υπάτη και η νήτη. Στη συνέχεια μετακινώντας τον καβαλάρη σε διάφορα σημεία, βρήκε ότι αν ταλαντωνόταν τα 3/4 της χορδής (συχνότητα 4/3) προέκυπτε ο τέταρτος φθόγγος από τους οκτώ μιας μουσικής κλίμακας, η μέση, ενώ αν ταλαντωνόταν τα 2/3 της χορδής (συχνότητα 3/2) προέκυπτε ο πέμπτος φθόγγος, η παραμέση. Οι υπόλοιποι φθόγγοι της κλίμακας κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας το λόγο 9/8 ως εξής:

- Ο δεύτερος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πρώτου (υπάτη) αν τον πολλαπλασιάσουμε με 9/8:  $1 \times 9/8 = 9/8$  δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα 8/9 της χορδής.
- Ο τρίτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του δεύτερου (9/8) αν και πάλι πολλαπλασιαστεί με 9/8:  $9/8 \times 9/8 = 81/64$  δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 64/81 της χορδής.
- Ο έκτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πέμπτου (παραμέση) που πολλαπλασιάζεται με 9/8:  $1:2/3 \times 9/8 = 27/16$  δηλαδή θα ταλαντώνονται τα 16/27 της χορδής.
- Τέλος, ο έβδομος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του έκτου και πάλι

πολλαπλασιαζόμενου με  $9/8$ :  $1:16/27 \times 9/8 = 243/128$  δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα  $128/243$  της χορδής.



Πέρα από το μονόχορδο, ο Πυθαγόρας πειραματίστηκε και με άλλα υλικά και τις ιδιότητές τους που συνθέτουν τα μουσικά διαστήματα, όπως η τάση χορδών ίσου μήκους και πάχους, το μήκος ηχητικού σωλήνα κ.τ.λ. Ο χωρισμός και καθορισμός των μουσικών διαστημάτων που πέτυχε, ήταν ένα τεράστιας σημασίας επίτευγμα τόσο για τη μουσική και τη θεωρία της όσο και για τα μαθηματικά και τη δύναμή τους να ερμηνεύουν τον κόσμο με αριθμούς όπως εξάλλου δίδασκε και ο Πυθαγόρας. Πέρα από τη μεγάλη σημασία για τη θεωρία της μουσικής, ο υπολογισμός του έδωσε την ευκαιρία να κατασκευαστούν μουσικά όργανα με μεγαλύτερη ακρίβεια από πριν. Με το πέρασμα του χρόνου, η Πυθαγόρεια μουσική κλίμακα τροποποιήθηκε είτε για πρακτικούς είτε για καθαρά φιλοσοφικούς λόγους, όμως ο Πυθαγόρας είχε δείξει έναν δρόμο που και οι σύγχρονες μουσικές κλίμακες ακολουθούν. Ακόμα και σήμερα υπολογίζουμε μαθηματικά τα μουσικά διαστήματα τα οποία βέβαια έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά από τότε.

Ο Αριστόξενος, νεότερος του Πυθαγόρα (περί το 375 π.Χ.) υπήρξε φιλόσοφος και σημαντικότερος θεωρητικός της μουσικής και του δόθηκε μάλιστα η ονομασία «ο Μουσικός». Η μέθοδός του ήταν κυρίως εμπειρική. Το σύστημα διδασκαλίας του βασίζεται σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα, στην ικανότητα του αυτιού να αντιλαμβάνεται την αρμονική σχέση των μουσικών τόνων. Δεν ερευνά τις αριθμητικές σχέσεις μέσα στην οκτάβα, όμως καθορίζει τον ολόκληρο και τον μισό τόνο και κατασκευάζει μια κλίμακα με βάση το ένα δωδέκατο του τόνου.

Ο Ευκλείδης από την άλλη, έχει μια γεωμετρική πρόταση για τα μουσικά διαστήματα. Θεωρεί ότι αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές, με μία όμως διαφορά: ενώ οι ευθείες γραμμές που παράγονται ως αριθμοί, ορίζονται με δύο γράμματα ένα στην αρχή και ένα στο τέλος τους, τα μουσικά διαστήματα δηλώνονται με ένα γράμμα.

The image shows three musical staves, each with a vocal line (VOC) and an instrumental line (INSTR). The notation consists of circles and crosses on a staff. Below each staff is a sequence of Greek letters.

**Staff 1:**  
 VOC: { 3 6 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100  
 INSTR: 3 6 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

**Staff 2:**  
 VOC: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100  
 INSTR: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

**Staff 3:**  
 VOC: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100  
 INSTR: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Στη σημερινή πραγματικότητα, τόσο η μουσική θεωρία, όσο και η μουσική πράξη, ερμηνεύονται με φυσικούς νόμους, που με τη σειρά τους διατυπώνονται με μαθηματικές σχέσεις.

Στην ακουστική (στον ιδιαίτερο κλάδο της φυσικής που έχει ως αντικείμενο τον ήχο και τις ιδιότητές του) ένα μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν ο λόγος δύο συχνοτήτων.

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο λόγος είναι απλής μορφής όπως για παράδειγμα οι γνωστοί μας λόγοι της καθαρής πέμπτης (3/2), της καθαρής τετάρτης (4/3), της οκτάβας (2/1) κ.λ.π. Σε άλλες περιπτώσεις, ελλείπει μεγίστου κοινού διαιρέτη, οι όροι του λόγου είναι μεγάλοι αριθμοί όπως στο διάσχισμα (2048/2025). Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη, η σύγκριση δύο μουσικών διαστημάτων.

Η απλούστευση στην παράσταση των μουσικών διαστημάτων επήλθε με τη βοήθεια της λογαριθμικής σχέσης

μέγεθος μουσικού διαστήματος =  $k * \log(f_2/f_1)/\log 2$

στην παραπάνω σχέση, όπου  $f_1$ ,  $f_2$  οι συχνότητες των φθόγγων του μουσικού διαστήματος και  $f_2 > f_1$ . Το  $k$  είναι μια σταθερά η τιμή της οποίας καθορίζει και ένα σύστημα μονάδων μουσικών διαστημάτων.

Συγκερασμοί για τα μουσικά διαστήματα

Ανάλογα με τις τιμές της σταθεράς  $k$  (οι οποίες αφορούν διαίρεση της οκτάβας σε τόσα τμήματα όσο η αντίστοιχη τιμή), έχουμε κι ένα σύστημα μονάδων μουσικών διαστημάτων. Οι πιο γνωστές και χαρακτηριστικές τιμές της σταθεράς  $k$ , αναφέρονται στη συνέχεια.

#### ΤΙΜΗ ΣΤΑΘΕΡΑΣ $k$ ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΤΩΝ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

12	.....Συγκερασμένο Ευρωπαϊκό ημιτόνιο
53	.....κόμμα του Μερκάτορα
68	.....Αραβική μονάδα, βυζαντινό ηχομόριο
72	.....Βυζαντινό ηχομόριο
301	.....Savart
665	.....Delfi unit
1200	.....cent

## ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

<http://www.greekbooks.gr/books/showBook.asp?aID=157&bookID=148042>

<http://www.greekbooks.gr/books/showbook.asp?aID=157&bookID=64641>

<http://www.greekbooks.gr/books/showbook.asp?aID=157&bookID=162087>

<http://www.greekbooks.gr/books/showbook.asp?aID=157&bookID=149878>

<http://www.greekbooks.gr/books/showbook.asp?aID=157&bookID=130923>

## ΠΗΓΕΣ

: Ελληνική ιστοσελίδα για τη Βυζαντινή μουσική , Focus , Πανελλήνιο Σχολικό δίκτυο

**rapsodos**

✓ Δικτυακός τόπος για τα Μαθηματικά



[Διδακτική των Μαθηματικών](#) | [Δραστηριότητες](#) | [Σημειώσεις](#) | [Διαγωνίσματα](#)  
[Κεντρική σελίδα](#) / [Διδακτική των Μαθηματικών](#) /

## Αρχαία ελληνική μουσική

### Αρμονία: Η μαθηματική θεωρία της μουσικής. Η αριθμητική σε κίνηση

Ο Πλάτωνας στην "Πολιτεία" (530 c8 - 531 c8) αναφέρει τα 4 μαθήματα που κάνει ένα άτομο "ανώτερο". Αυτά είναι: Η αριθμητική, η γεωμετρία, η αστρονομία και η μουσική. Οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι (από τους οποίους το έργο του Πλάτωνα έχει επηρεαστεί) πίστευαν όπως αναφέρει ο ίδιος ο Πλάτων (530 d8) ότι αυτές είναι "αδελφές επιστήμες". Τα μαθήματα χωρίζονταν σε 4 γένη τα οποία συσχετίζονταν μεταξύ τους:

Γεωμετρία: Μεγέθη σε ακινησία

Αστρονομία: Μεγέθη σε κίνηση

Αριθμητική: Αριθμοί σε ακινησία

Μουσική: Αριθμοί σε κίνηση

Οι Πυθαγόρειοι είχαν διαπιστώσει ότι για την αρμονία δεν είχαν σημασία τα απόλυτα μήκη των χορδών (το κούρδισμα δηλαδή του οργάνου) μιας λύρας αλλά η μεταξύ τους σχέση η οποία καθορίζει και την μελωδία στη μουσική. Είναι η σχέση μεταξύ δύο χορδών (των μηκών τους) μιας λύρας η οποία αποτελεί ένα μουσικό διάστημα (δίχορδο) - όπως ακριβώς και στη θεωρία των λόγων μεταξύ αριθμών μπορεί διαφορετικοί αριθμοί (αριθμητής και παρονομαστής) να δίνουν το ίδιο κλάσμα:  $1/2 = 4/8$ . Ένα διχορδο λοιπόν μπορούμε να το φανταστούμε ως λόγο αριθμών (κλάσμα). Οι αριθμοί αυτοί θα είναι τα μήκη των χορδών μιας λύρας.

Οι πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν την λύρα και όπως αναφέρει ο Ιάμβλιχος στο έργο του "περί πυθαγορείου βίου" τους αυλούς τους θεωρούσαν "υβριστικούς" (αλλαζονικό) όργανο. Χρησιμοποιούνταν η οχτάχορδη λύρα (Βαβυλωνιακής προέλευσης). Οι ονομασίες των χορδών της αναφέρονται από τον Νικόμαχο τον Γερασινό (2 αιώνας μ.Χ.) στο έργο του "πυθαγορείου αρμονικού εγχειριδίου κεφάλαια", χωρίο 11,4,13-30)

Τον Φιλόλαο (5-4 αιώνας π.Χ.) στο έργο του "περί φύσεως" τον ενδιαφέρουν μόνο οι χορδές με μήκη 6, 8, 9 και 12 μονάδες μήκους αντιστοιχα (ανεξάρτητα όπως τονίσαμε από την μονάδα μήκους που χρησιμοποιείται κάθε φορά, αφού αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η



Συζή

Οι Πυθαγόρειοι για την αρμονία απόλυτα με κούρδισμα λύρας αλλά οποία καθορίζει μουσική. ενδιαφέρει

Οι πυθαγόρειοι λύρα και στο έργο τους αυλούς "υβριστικούς"

Υπήρχε σ μαθηματι στους αριθ τα μεγέθη συνεχές. ενοούσαν αριθμήσιμ πλήθους τ ένας προκ προηγούμε



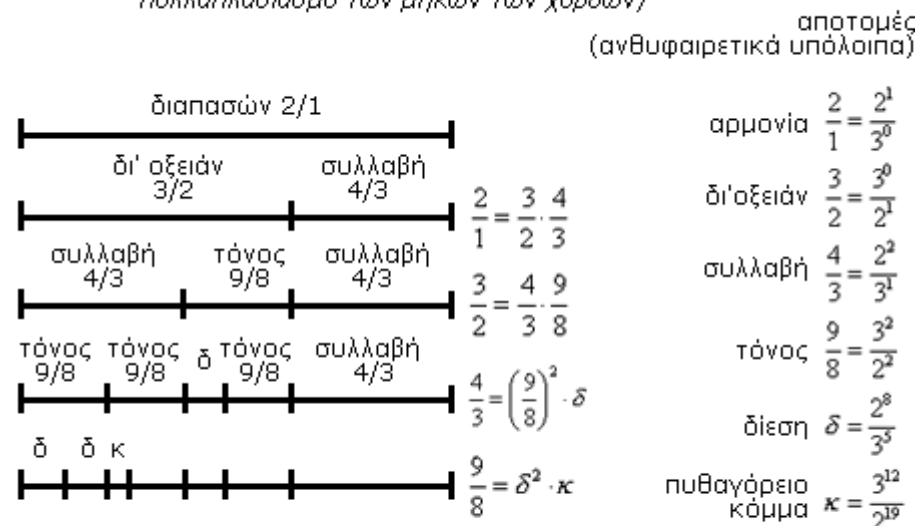
μεταξύ τους σχέση και όχι τα απόλυτα μεγέθη).

Ονομασία χορδής	Μήκος χορδής	"Σύμφωνα" μουσικά διαστήματα		
νήτη	12	$\left[ \begin{array}{l} \text{"συλλαβή"} \\ \text{(δια τεσσάρων} \\ \text{χορδών} \\ \text{συγχορδία)} \\ \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{l} \text{"δι'οξειάν"} \\ \text{ή "ημιόλιον"} \\ \text{(δια πέντε} \\ \text{χορδών} \\ \text{συγχορδία)} \\ \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{l} \text{"τόνος" ή} \\ \text{"επὸγδοόν"} \\ \frac{9}{8} \end{array} \right]$
παρανήτη	9			
τρίτη	8			
παραμέση	6			
μέση				
λιγανός				
παρυπάτη				
υπάτη				
				$\left[ \begin{array}{l} \text{"δια πασών"} \\ \text{των χορδών} \\ \text{συγχορδία} \\ \frac{12}{6} = \frac{2}{1} \end{array} \right]$

Οι Πυθαγόρειοι ασχολούνταν με τα μουσικά διαστήματα  $2/1$  ("αρμονία" ή οκτάβα) και  $3/2$  ("δι'οξειάν" ή "δια πέντε"). Τους απασχολούσε η εύρεση κοινού μέτρου για τα διαστήματα αυτά. Η ανακάλυψη δηλαδή κάποιας σχέσης συμμετρίας (ενός διαστήματος που κάποιο πολλαπλάσιο του να παράγει τα διαστήματα αυτά). Στο απόσπασμα 6 από το έργο του Φιλόλαου "περι φύσεως" διασώζονται οι εξής σχέσεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων:

#### Η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της μουσικής

(Η σύνθεση μουσικών διαστημάτων αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό των μηκών των χορδών)



Αν θεωρήσουμε ότι  $\kappa=1$  τότε  
τόνος = 2 διέσεις

Η διεση τότε είναι ένα ημιτόνιο (μισός τόνος) και έτσι έχουμε  
αρμονία=[τόνος, τόνος, ημιτόνιο, τόνος, τόνος, τόνος, ημιτόνιο]  
που δεν είναι άλλη από την ματζόρε κλίμακα!

Τα διαδοχικά διαστήματα που δημιουργούνται κατά τις ανθυφαιρέσεις είναι λόγοι μεταξύ δυνάμεων του 2 και του 3. Η διαδικασία οφείλει να σταματήσει όταν κάποιος από τους λόγους αυτούς γίνει ίσος με τη μονάδα, οπότε και ο προηγούμενος λόγος που θα έχει βρεθεί θα αποτελεί και το κοινό μέτρο που αναζητούμε ο οποίος και λόγος και θα καταμετρεί και το αρχικό διάστημα (αλλά και όλα τα άλλα). Οι λόγοι όμως αυτοί, εξ' αιτίας της μορφής τους ( $2^m/3^n$ ) όσο και να αυξάνουν οι εκθέτες, προσεγγίζουν τη μονάδα, χωρίς όμως ποτέ να γίνουν ίσοι με αυτή. Τα μεγέθη αυτά είναι λοιπόν ασύμμετρα και η πολλαπλασιαστική διαδικασία της ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι άπειρη, καθώς κανένα από τα προκύπτοντα διαστήματα δε μπορεί να αποτελέσει κοινό μέτρο αυτής και τα αρχικά μεγέθη  $2/1$ ,  $3/2$  είναι μεταξύ τους ασύμμετρα.

Τα αποτελέσματα αυτά ήταν γνωστά στους πυθαγορείους και μάλλον είναι το πρώτο αποτέλεσμα - ένδειξη περί ασυμμετρίας στη φύση στο οποίο είχαν καταλήξει (πριν ακόμα ανακαλύψουν την ασυμμετρία της τετραγωνικής ρίζας του 2).

Η ανθυφαίρεση (δηλαδή ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών) ήταν μέθοδος γνωστή στους πυθαγορείους πολύ πριν τουν Ευκλείδη, ο οποίος την αναφέρει στο VII βιβλίο των στοιχείων του (πεπερασμένη ανθυφαίρεση αριθμών) και στο X βιβλίο

μονάδας).

Ανθυφαίρεση  
αφαίρεση  
το μεγαλύ  
maximal  
κάθε φορ  
μπορούμε

(άπειρη ανθυφαίρεση μεγεθών) και πρέπει να ήταν το ουσιαστικό βήμα της μετάβασης (αναφέρεται και από τον Αριστοτέλη ένας ανθυφαιρετικός ορισμός της αναλογίας στα "τοπικά") από την προγενέστερη (εμπειρική) θεωρία λόγων με βάση την αρμονία (πυθαγόρεια μαθηματική θεωρία της μουσικής) στην μετέπειρα εξελιγμένη μορφή τους όπως υπάρχει στον Ευκλείδη.

Πεπερασμένη ανθυφαίρεση -> Συμμετρα μεγέθη (ή αριθμοί) (υπάρχει μέγιστο κοινό μέτρο)

Άπειρη ανθυφαίρεση -> Ασυμμετρία μεγεθών

Εμπειρική θεωρία λόγων μεγεθών	Ανθυφαίρεση μεγεθών Αριστοτέλης, "τοπικά" $\alpha/\beta = \beta/\gamma \Leftrightarrow$ $\text{Ανθ}(\alpha,\beta) = \text{Ανθ}(\gamma,\delta)$	Θεωρία αναλογιών μεγεθών (Εύδοξος, βιβλίο V Στοιχείων Ευκλείδη)
Εμπειρική θεωρία λόγων αριθμών (πυθαγόρεια θεωρία με βάση την αρμονία)	Θεωρία αναλογιών αριθμών (Θεαίτητος, βιβλία VII, X Στοιχείων Ευκλείδη)	

Οι αριθμοί για τους αρχαίους θεωρούνταν οι θετικοί ακέραιοι μόνο. Το μηδέν δεν θεωρούνταν αριθμός καθώς επίσης και την μονάδα δεν την θεωρούσαν αριθμό, αλλά διαχώριζαν την μονάδα ως την οντότητα εκείνη η οποία δημιουργεί τους αριθμούς. (Θεωρούσαν την μονάδα ως το ον το οποίο με τη βοήθεια του απείρου (δηλαδή διαδοχικές προσθέσεις μονάδων) μας δίνει με επαγωγικά βήματα το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Μονάς (αριθμός 1)      Αριθμοί

Χρονική στιγμή  
(τώρα)                      Χρόνος

Αρμονία                      Μουσικός  
   φθόγγος

Υπήρχε σαφής διαχωρισμός στα μαθηματικά των αρχαίων ανάμεσα στους αριθμούς (θετικοί ακέραιοι) και τα μεγέθη (μήκη, εμβαδά, όγκοι). Τα μεγέθη χαρακτηρίζονταν από το συνεχές. Οι αρχαίοι λέγοντας άπειρο εννοούσαν μόνο το διακριτό - αριθμήσιμο άπειρο (όπως το άπειρο του πλήθους των φυσικών ακεραίων που ο ένας προκύπτει επαγωγικά από τον προηγούμενο του με πρόσθεση μιας μονάδας).

Αναλογία: Ισότητα λόγων

Ανθυφαίρεση: Αμοιβαία διαδοχική αφαίρεση μεγεθών του μικρότερου από το μεγαλύτερο κάθε φορά, κατά ένα maximal τρόπο κάθε φορά (αφαιρώντας κάθε φορά όσα ακέραια πολλαπλάσια μπορούμε...)

πχ. Ας δούμε την ανθυφαίρεση  $\text{Ανθ}(27,23)$

$$27 = 1 \cdot 23 + 4$$

$$23 = 5 \cdot 4 + 3$$

$$4 = 1 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

Άρα  $\text{Ανθ}(27,23) = [1,5,1,3]$ . Στο παράδειγμα μας μέγιστος κοινός διαιρέτης  $(27,23) = 1$

πχ. Για την ανθυφαίρεση των 48 και 32 έχουμε τα εξής βήματα:

$$48 = 1 \cdot 32 + 16$$

$$32 = 2 \cdot 16 + 0$$

Άρα  $\text{Ανθ}(48,32) = [1,2]$  και  $\mu.\kappa.\delta.(48,32) = 16$  (Είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς που διαιρούν τον 48 και τον 32 ταυτόχρονα)



Η έννοια της ανθυφαίρεσης χαρακτηρίζει τη φιλοσοφία του Πλάτωνα. Για να μελετήσουμε το έργο του Πλάτωνα χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά (μια και ο Πλάτωνας ήταν επηρεασμένος από την πυθαγόρεια αριθμοκεντρική φιλοσοφία) αλλά και αντίστροφα, χρησιμοποιούν οι ιστορικοί των μαθηματικών τα έργα του Πλάτωνα για να αποκτήσουν εικόνα της μαθηματικής γνώσης της εποχής. Η έννοια της ανθυφαίρεσης είναι θεμελιώδης για τον Πλάτωνα. Η κοσμοθεωρία του είναι ανθυφαιρετική και πιστεύει ότι κάθετι στη φύση δημιουργείται και εξελίσσεται με ανθυφαιρετικές διαδικασίες. Η ζωή, ο θάνατος, η κοσμογονία, οι φιλοσοφικές ιδέες και έννοιες, όλα διαρθρώνονται με βάση την ανθυφαίρεση.

✓ Θάνος Α. Τάσιος, Μαθηματικός, Μ.Εδ Διδακτικής & Μεθοδολογίας των Μαθηματικών Παν. Αθηνών